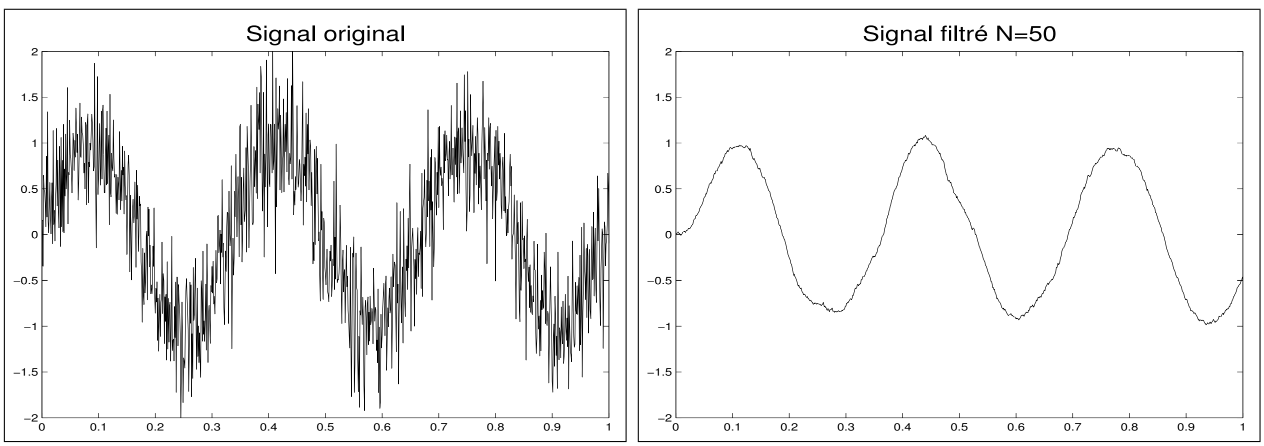
Télécom Physique Strasbourg **Module 2201**

TRAITEMENT DU SIGNAL ALÉATOIRE



EXERCICES

Fabrice Heitz / Vincent Noblet

Septembre 2013

(Certains exercices sont partiellement adaptés de M. Charbit, Éléments de théorie du signal : les signaux aléatoires*, Ellipses, 1990.)*

1 Stationnarité, ergodicité, fonction d'autocorrélation, densité spectrale de puissance

Exercice 1 : Signal sinusoïdal à phase aléatoire

On considère le signal aléatoire à temps continu défini par :

$$X(t,\omega) \;=\; a\cos(2\pi f_0 t \;+\; \Phi(\omega))$$

où a et f_0 sont des constantes et $\Phi(\omega)$ est une variable aléatoire équirépartie sur $[0, 2\pi]$.

1. Pour t fixé donner l'expression de la densité de probabilité de la variable aléatoire $X(t,\omega)$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X(t,\omega)]$ et $\overline{X(t,\omega)}$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X(t,\omega)X(t-\tau,\omega)]$ et $\overline{X(t,\omega)X(t-\tau,\omega)}$.
4. Que peut-on en conclure sur la stationnarité et l'ergodicité de ce signal ?
5. Déterminer la densité spectrale de puissance $S_X(f)$ de $X(t,\omega)$. Interpréter la forme de ce spectre.

Exercice 2

On considère un signal aléatoire réel à temps discret $X(n,\omega)$. Les variables aléatoires $X(n,\omega),\ n \in Z$ sont supposées indépendantes, de même valeur moyenne μ et de même variance σ^2.

Donner l'expression de la fonction d'autocorrélation $R_X(n_1,n_2) \;=\; \mathbb{E}[X(n_1)X(n_2)]$. Le signal X est-il stationnaire au second ordre ? Quel est la nature du signal aléatoire X ?

Mêmes questions pour le signal $Y(n,\omega) \;=\; n\,X(n-1,\omega)$.

Exercice 3 : Signal sinusoïdal à fréquence aléatoire

On considére le signal aléatoire :

$$X(t,\omega) \;=\; a\,e^{j(2\pi F(\omega)t \;+\; \varphi)}$$

La fréquence de l'exponentielle complexe est une variable aléatoire $F(\omega)$ (de densité de probabilité $p_F(f)$), équirépartie sur l'intervalle $[f_0-\Delta f, f_0+\Delta f]$. a et φ sont supposées constantes.

1. Représenter des réalisations de $\mathrm{Re}[X(t,\omega)]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X(t,\omega)]$ et $\overline{X(t,\omega)}$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X(t,\omega)X^*(t-\tau,\omega)]$ et $\overline{X(t,\omega)X^*(t-\tau,\omega)}$.
4. Que peut-on en conclure sur la stationnarité et l'ergodicité de ce signal ?

Exercice 4 : Interprétation du coefficient de corrélation : mesure de similarité entre signaux

Dans un signal, l'information utile est souvent représentée par les fluctuations du signal autour de sa valeur moyenne. Pour définir une mesure de la ressemblance ou de la dissemblance de deux signaux, on est donc amené à les comparer *indépendamment* du décalage de leur composante continue et de leur niveau d'amplification éventuel. La mesure de ressemblance va donc s'appuyer sur la différence résiduelle entre les deux signaux, après ajustement de leur composante continue et de leur facteur d'amplification.

Soit $X(t,\omega)$ et $Y(t,\omega)$ deux signaux aléatoires à comparer. $X(t,\omega)$ et $Y(t,\omega)$ sont représentés à l'instant t par des *variables aléatoires* notées X et Y respectivement.

L'écart quadratique, à l'instant t, entre les deux signaux (après ajustement) s'écrit :

$$\epsilon^2 \ = \ \mathbb{E}[|Y \ - \ aX \ - \ b|^2]$$

où a et b sont deux coefficients à ajuster.

1. Calculer la valeur minimale ϵ^2_{min} de ϵ^2 par rapport aux coefficients a et b (en fonction de $m_x = \mathbb{E}[X],\ m_y = \mathbb{E}[Y],\ \sigma_x^2,\ \sigma_y^2$ et $\mathbb{E}[XY]$).
2. Étudier les variations de ϵ^2_{min} en fonction du coefficient de corrélation ρ entre X et Y :

$$\rho \ = \ \frac{\mathbb{E}(XY) \ - \ \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sigma_x\sigma_y} \ = \ \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right]}{\sigma_x\sigma_y}$$

Exercice 5 : Étude de l'effet Doppler

On considére le signal aléatoire :

$$X(t,\omega) \ = \ e^{j(2\pi F(\omega)t \ + \ \phi)}$$

La fréquence est une variable aléatoire $F(\omega)$ de densité de probabilité $p_F(f)$ et la phase ϕ est supposée constante.

1. Calculer la fonction d'autocorrélation statistique du processus $X(t,\omega)$.
2. Déterminer sa densité spectrale de puissance.
3. On considère une particule située sur un axe Ox et rayonnant au repos, à la distance r, un signal $e^{j2\pi f_0(t \ - \ \frac{|r|}{c})}$. Cette particule est supposée animée d'une vitesse constante v le long de l'axe des x. En supposant qu'à l'instant $t = 0$ la particule se trouve à l'origine du repère, quel est le signal reçu par un observateur immobile placé en un point r_0 de l'axe des x ?
4. La vitesse de la particule est aléatoire et représentée par une variable aléatoire V, de densité de probabilité $p_V(v)$. Donner l'expression de la densité spectrale de puissance du signal reçu.

2 Filtrage des signaux aléatoires

Exercice 6 : Filtrage d'un bruit blanc par un filtre analogique RC

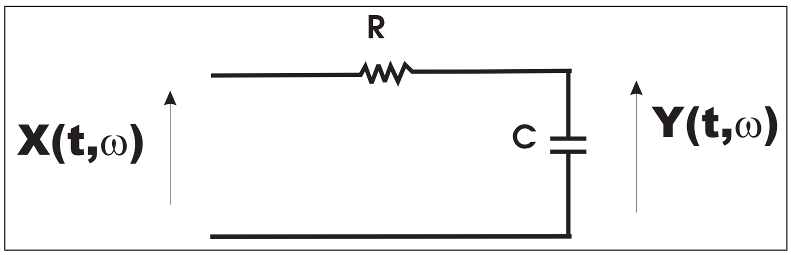


FIGURE 1 – Filtre RC

On considère le filtre RC représenté Fig. 1.

1. Calculer sa réponse en fréquence $H(f)$. Quel est l'effet de ce filtre sur le signal en entrée ?
2. On présente en entrée de ce filtre un bruit blanc centré $X(t)$ de densité spectrale de puissance (d.s.p.) $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$. Déterminer la d.s.p. du signal aléatoire $Y(t)$ en sortie du filtre.
3. En déduire la puissance P_Y du signal en sortie du filtre ainsi que sa fonction d'autocorrélation $R_Y(\tau)$.

Exercice 7 : Filtre moyenneur discret

Le filtre moyenneur discret est le filtre effectuant l'opération de moyennage suivante :

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-(N-1)}^{n} x(i)$$

1. Montrer que cette opération de moyennage constitue un filtrage linéaire du signal $x(n)$.
2. Déterminer la réponse impulsionnelle et la réponse en fréquence de ce filtre.
3. On présente en entrée de ce filtre un bruit blanc discret $X(n)$ centré de d.s.p. $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$. Quelle est la puissance P_X de ce signal ? Déterminer la d.s.p. du signal aléatoire $Y(t)$ en sortie du filtre et sa puissance P_Y. Conclusion ?

Exercice 8 : Filtre moyenneur analogique

On considère un système dont la relation entrée-sortie s'exprime par :

$$y(t) \;=\; \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)du$$

1. Montrer que ce système est un filtre (linéaire) (il est appelé "filtre moyenneur"). Déterminer sa réponse impulsionnelle $h(t)$ et sa réponse en fréquence $H(f)$.
2. On considère en entrée du filtre un signal aléatoire $X(t)$ centré, stationnaire au second ordre, de densité spectrale de puissance donnée par :

$$S_X(f) \;=\; \begin{cases} \frac{N_0}{2} & pour\ |f| \;<\; B \\ 0 & sinon \end{cases}$$

   avec $BT \;\gg\; 1$ (bruit "blanc" dans la bande [-B,B]). Pour $T = 1\mu s$ on mesure une puissance $P = 1\mu W$ en sortie du filtre. En déduire N_0 (préciser l'unité).

Exercice 9 : Filtrage d'ordre 1 d'une suite aléatoire

On considère le filtre numérique défini par la relation de récurrence suivante :

$$y(n) \;-\; \frac{1}{2}y(n-1) \;=\; x(n)$$

avec la condition initiale : $y(n) = 0,\ $ pour $n \;<\; 0.$

1. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre défini par cette relation. Ce filtre est-il stable ?
2. En déduire l'expression suivante pour le module de sa réponse en fréquence :

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4} - \cos(2\pi f)}}$$

   Représenter l'allure de $|H(f)|^2$.
3. Calculer sa réponse impulsionnelle $h(n)$ de deux façons différentes :
   – en revenant à la définition de la réponse impulsionnelle ;
   – en partant de $H(z)$.
   On rappelle que pour $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

4. On suppose que $X(n)$ est un signal aléatoire, stationnaire au second ordre, centré et de fonction d'autocorrélation :

$$R_X(k) \;=\; \begin{cases} 1 & si\ k = 0 \\ \frac{1}{2} & si\ k \pm 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

   Déterminer la densité spectrale de puissance $S_X(f)$ de la suite aléatoire $X(n)$. Représenter son allure.
5. Calculer la d.s.p. $S_Y(f)$ de la suite aléatoire $Y(n)$ observée en sortie du filtre. Représenter son allure.

3 Estimation statistique

Exercice 10 : Estimateurs de la valeur moyenne d'un bruit blanc. Qualité d'un estimateur

On se pose le problème de l'estimation de la valeur moyenne d'un signal aléatoire $X(n,\omega)$ (supposé stationnaire (au second ordre) et ergodique) à partir d'une réalisation de ce signal.

On considère le cas particulier d'un bruit blanc discret $X(n,\omega)$ de moyenne non nulle m_X et de variance σ_X^2.

Suite à une mesure (expérience statistique), on observe une réalisation de ce bruit (suite de N échantillons) : $\{X(0,\omega),\ X(1,\omega),\ \ldots,\ X(N-1,\omega)\}$.

On considère les deux estimées suivantes de la moyenne statistique :

$$\begin{array}{lrcl} \text{estimée 1 :} & \hat{M}_1 & = & \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} X(n,\omega) \\ \text{estimée 2 :} & \hat{M}_2 & = & X(0,\omega) \end{array}$$

$\hat{M}_1$ est l'"estimateur" classique de la valeur moyenne. $\hat{M}_2$ est un autre estimateur de la moyenne, qui paraît intuitivement de "qualité" inférieure au premier.

Les estimateurs $\hat{M}_1$ et $\hat{M}_2$ dépendent tous deux de l'épreuve ω : $\hat{M}_1(\omega)$ et $\hat{M}_2(\omega)$. **Ce sont donc des variables aléatoires** !

Pour mesurer la qualité d'un estimateur, on introduit la notion de "biais" et de "variance" de l'estimateur. Intuitivement, un "bon" estimateur devra posséder les propriétés suivantes :

- "en moyenne" l'estimateur $\hat{M}$ doit donner la vraie valeur du paramètre que l'on cherche à estimer :
  $$\mathbb{E}[\hat{M}] \ = \ m_X$$
  (c'est-à-dire que si l'on fait un grand nombre n d'expériences statistiques :
  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{M}(\omega_1) + \hat{M}(\omega_2) + \cdots + \hat{M}(\omega_n))}{n} \ = \ m_X$$
)
  Le biais b de l'estimateur $\hat{M}_i$ est défini par :
  $$b(\hat{M}) \ = \ \mathbb{E}[\hat{M}] \ - \ m_X$$
- la dispersion des valeurs de $\hat{M}$ autour de sa valeur moyenne doit rester faible, ce qui garantit en général d'avoir, suite à une mesure, une valeur proche de la bonne valeur. Ceci se traduit d'un point de vue mathématique par la variance de l'estimateur :
  $$\sigma^2(\hat{M}) \ = \ \mathbb{E}[(\hat{M} \ - \ \mathbb{E}(\hat{M}))^2] \text{ faible}$$

1. Calculer le biais des deux estimateurs $\hat{M}_1$ et $\hat{M}_2$.
2. Calculer leur variance et la limite de ces variances lorsque le nombre d'échantillons observés N tend vers $+\infty$. Qu'en concluez-vous sur la qualité de ces deux estimateurs ?

Exercice 11 : estimation de la vitesse d'un mobile au sens du maximum de vraisemblance

On considère un mobile se déplaçant suivant un mouvement uniforme (vitesse constante V). Sa position $X(n)$ est mesurée aux instants nT. Cette mesure est entachée d'une erreur que l'on peut considérer en première approximation comme un bruit $W(n)$ supposé additif, blanc gaussien, centré et de variance σ^2 :

$$X(n) \;=\; V\,nT \;+\; W(n)$$

On cherche à estimer V à partir de la mesure (observation) de N échantillons de $X(n)$, $n = 1, \ldots, N$. Ces échantillons (réalisations du signal aléatoire) sont notés $x(n)$, $n = 1, \ldots, N$.

1. On considère tout d'abord l'estimateur intuitif suivant (moyenne des vitesses en chaque point) :

   $$\hat{V}_{MOY} \;=\; \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{X(n)}{nT}$$

   Calculer le biais, la variance et l'EQM de cet estimateur.
2. Donner l'expression de la loi (densité) *conjointe* des N variables aléatoires $X(1),\ X(2),\ \ldots,\ X(N)$. Cette densité, qui dépend du paramètre à estimer V sera notée : $f_{X(1),\ X(2),\ \ldots,\ X(N)}(x(1), x(2), \ldots, x(N)\ ;\ V)$
3. On construit un nouvel estimateur sur le principe du *maximum de vraisemblance* : on cherche le paramètre V qui maximise la *vraisemblance des observations*, dans le sens où il donne à la suite d'échantillons observés $(x(1),\ x(2),\ \ldots,\ x(N))$ la ¡¡probabilité élémentaire¿¿ : $f_{X(1),\ X(2),\ \ldots,\ X(N)}(x(1), x(2), \ldots, x(N)\ ;\ V)$ la plus forte.
   Déterminer cet estimateur $\hat{V}_{MV}$ défini mathématiquement par :

   $$\max_V f_{X(1),\ X(2),\ \ldots,\ X(N)}(x(1), x(2), \ldots, x(N)\ ;\ V) \quad \Rightarrow \quad \hat{V}_{MV}$$

4. Calculer son biais, sa variance et son EQM.
5. Comparer les qualités de ces deux estimateurs. Conclusion ?

Exercice 12 : Estimation d'un paramètre de moyenne *et* variance au sens du maximum de vraisemblance

On considère la séquence de données suivante :

$$X(n) \;=\; A \;+\; W(n), \quad n = 1, \ldots, N.$$

où A est une constante ($A > 0$), $W(n)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et *de variance inconnue* A.

1. Déterminer la densité de probabilité conjointe des N variables aléatoires $X(1),\ X(2),\ \ldots,\ X(N)$.
2. En déduire l'estimateur, au sens du maximum de vraisemblance du paramètre inconnu A.

Exercice 13 : Estimateurs de la variance

On souhaite estimer la variance d'un signal aléatoire stationnaire discret $X(n)$ (dont les échantillons sont supposés indépendants) à partir d'une réalisation (composée de N échantillons). Sa moyenne est notée m_X, sa variance σ_X^2

On considère deux cas :

- Cas 1 : la moyenne statistique m_X du signal est connue. L'estimateur de la variance est :

$$\hat{\sigma}_{1N}^2 \ = \ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(X(n) \ - \ m_X)^2$$

- Cas 2 : la moyenne statistique m_X est inconnue et estimée conjointement par la formule :

$$\hat{m}_X \ = \ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(n)$$

  On adopte pour estimateur de la variance dans ce cas :

$$\hat{\sigma}_{2N}^2 \ = \ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(X(n) \ - \ \hat{m}_X)^2$$

Déterminer les biais de ces deux estimateurs.